Volume 6, Number 1, 2026

Research in Teacher Education Curriculum Studies

ISSN (Online): 2980-7948

Revolutionizing Geometric Multiple Representations and Mathematics Curriculum Development: The Impact of AUTOGRAPH Software on Volume and Area Concepts

Fateme. organji [1], ***Seyyed Hassan. Alamolhodaei*** [2], ***Mohadaseh. Alizadeh*** *[3], ***Mehdi. Jabbari Nooghabi*** [4]

1 Teacher and Master students of Mathematics Education, Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

2 Full Professor of Mathematics Education, Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

3 Teacher, Master and researcher of Mathematics Education, Thesis advisor, Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

4 Associate Professor of Statistics, Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Keywords:
. Mathematical representation
. Autograph software
. Geometry education
. Spatial concepts
. Mathematics Curriculum

Mohadaseh. Alizadeh
mo.alizadeh@alumni.um.ac.ir

ABSTRACT

Background and Objectives: Recent studies suggested that using multiple representations in digital environments can enhance mathematical understanding. The present study aimed to examine the effect of teaching with Autograph software on improving multiple representations in geometric concepts among seventh-grade students. **Methods:** This quasi-experimental research used a pretest-posttest design with two parallel groups. The statistical population included seventh-grade female students from a district near Mashhad in the 2024–2025 academic year. A total of 66 students were selected through convenience sampling. Both groups learned volume, area, and representation skills; one through Autograph and the other through traditional teaching method. The data collection instrument used was a researcher-made test assessing visual, symbolic, and interpretive dimensions. **Findings:** Repeated measures ANOVA showed that the Autograph group significantly outperformed the traditional group in the posttest ($p < 0.001$). **Conclusion:** These findings highlight the importance of incorporating multiple representations in learning geometry and suggest the need to reconsider traditional teaching approaches.

Received: 2025-08-16 **Reviewed:** 2025-11-27 **Accepted:** 2025-12-30 **Published Online:** 2026-08-23

Citation (APA): Organji, F., Alamolhodaei, S. H., Alizadeh, M. and Jabbari Nooghabi, M. (2026). Revolutionizing Geometric Multiple Representations and Mathematics Curriculum Development: The Impact of AUTOGRAPH Software on Volume and Area Concepts. *Journals of Research in Teacher Education Curriculum Studies*, *6*(1), 81-95.

https://doi.org/10.48310/JCDR.2025.20533.1222

Publisher: Farhangian University **Article type:** Research Article

©2025/authors retain the copyright and full publishing rights

دوره ۶، شماره ۱ ، ۱۴۰۵

پژوهش در مطالعات برنامه درسی تربیت معلم

ISSN (Online): 2980-7948

انقلابی در بازنمایی‌های چندگانه هندسی و توسعه برنامهٔ درسی ریاضی: تأثیر نرم‌افزار اتوگراف بر مفاهیم حجم و مساحت

فاطمه ارگنجی[۱]، سید حسن علم الهدایی[۲]، محدثه علی‌زاده[۳*]، مهدی جباری نوقابی[4]

۱ معلم و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، ریاضی کاربردی، علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲. استاد تمام آموزش ریاضی ، ریاضی کاربردی، علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

۳ . معلم و کارشناسی ارشد و محقق آموزش ریاضی، استاد مشاور پایان‌نامه، ریاضی کاربردی، علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

٤ . دانشیار آمار، گروه آمار ، علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

پیشینه و اهداف: پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهد که استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در محیط‌های دیجیتال می‌تواند به بهبود درک مفاهیم ریاضی کمک کند. هدف این پژوهش، بررسی تأثیر آموزش با نرم‌افزار اتوگراف بر تقویت بازنمایی‌های چندگانه در مفاهیم هندسی حجم و مساحت دانش‌آموزان پایه هفتم بود. **روش‌ها:** این مطالعه به صورت شبه‌تجربی در دو گروه موازی انجام شد. جامعه آماری دانش‌آموزان دختر پایه هفتم یکی از مناطق اطراف مشهد در سال تحصیلی ۱۴۰۳–۱۴۰۴ بود که ۶۶ نفر به روش نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. هر دو گروه مفاهیم حجم، مساحت و مهارت‌های بازنمایی را فراگرفتند؛ با این تفاوت که یک گروه با نرم‌افزار اتوگراف و گروه دیگر با روش سنتی آموزش دیدند. ابزار پژوهش، آزمون محقق‌ساخته‌ای با سه بُعد بصری، نمادین و تفسیری بود. **یافته‌ها:** نتایج تحلیل واریانس با اندازه‌گیری مکرر نشان داد که عملکرد گروه آموزش دیده با اتوگراف در پس‌آزمون به‌طور معناداری بهتر از گروه دیگر بود($p < 0.001$). **نتیجه‌گیری:** یافته‌ها بر نقش موثر بازنمایی‌های چندگانه را در یادگیری هندسه تأکید دارد و ضرورت بازنگری در روش‌های آموزشی و توسعه برنامهٔ درسی ریاضی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی:
. بازنمایی ریاضی
. نرم‌افزار اتوگراف
. آموزش هندسه
. مفاهیم فضایی
. برنامه درسی ریاضی

۱. نویسنده مسئول: محدثه علی زاده
mo.alizadeh@alumni.um.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴-۰۵-۲۵ **تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۴-۰۹-۰۶ **تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۴-۰۹-۰۹ **تاریخ انتشار:** ۱۴۰۵-۰۶-۰۱

استناد به این مقاله: ارگنجی، فاطمه؛ علم‌الهدایی، سید حسن ؛ علی زاده، محدثه و جباری نوقابی، مهدی. (۱۴۰۵). انقلابی در بازنمایی‌های چندگانه هندسی و توسعه برنامه‌درسی ریاضی: تأثیر نرم‌افزار اتوگراف بر مفاهیم حجم و مساحت. *پژوهش در مطالعات برنامه درسی تربیت معلم*، ۶(۱)، ۹۵-۸۱.

https://doi.org/ 10.48310/JCDR.2025.20533.1222

ناشر: دانشگاه فرهنگیان **نوع مقاله:** پژوهشی

۱٤۰٤ ©/نویسندگان دارنده حق مؤلف مقاله خود بدون محدودیت هستند.

مقدمه

در عصر دانش دیجیتال، آموزش ریاضی نیازمند فراهم‌آوردن محیطی پویا، تعاملی و مبتنی بر فناوری است که یادگیری معنادار، اکتشافی و مشارکتی را ممکن سازد. این محیط‌ها به دانش‌آموزان اجازه می‌دهند میان نماد، تصویر و زبان پیوند برقرار کرده و مفاهیم ریاضی را به‌صورت فعال تجربه کنند(Akbar & Pourkrimi, 2025; Lesh et al., 1983; Kaput, 1986). در چنین بسترِ آموزش‌محوری، بازنمایی‌ها نقش بنیادین دارند: «بازنمایی مفهومی» به‌عنوان نشانه‌ای شناخته می‌شود که در یک نظامِ نشانه‌ای تفسیر می‌گردد، ساختار مفهومی را آشکار می‌سازد، میان نمادها، زبان و تصویر پیوند برقرار می‌کند و به بازسازیِ بازنمایی‌های درونی[2] یادگیرنده کمک می‌کند (Thomas, 2008). بازنمایی‌های درونی -یعنی مدل‌ها و ساختارهای ذهنی که دانش‌آموز هنگام فهم یک مفهوم شکل می‌دهد- در تعامل با بازنمایی‌های بیرونی[3] فرایند فهم مفهومی را جهت‌دهی می‌کنند؛ بازنمایی‌های بیرونی مانند نمودار، مدل یا جدول نیز این روند را تقویت کرده و توان استدلال تطبیقی را افزایش می‌دهند (Lesh et al., 1983; Nelissen & Tomic, 1998).

بهره‌گیری از نرم‌افزارهای آموزشی پویا همچون اتوگراف[4] می‌تواند چنین اهدافی را محقق کند. این نرم‌افزار با فراهم‌کردن تعامل پویا و بازخورد آنی، بستر لازم برای یادگیری اکتشافی[5] را فراهم می‌آورد؛ یادگیری‌ای که در آن دانش‌آموز از طریق دست‌ورزی، فرضیه‌سازی و آزمودن راه‌حل‌ها به‌طور فعال در فرایند فهم درگیر می‌شود (Graham, 2006; Sari et al., 2020; McLeod & Adams, 1979). افزون بر این، اتوگراف با ایجاد پل میان نمایش‌های نمادین و تصویری، به‌ویژه در مباحث هندسه، درک مفهومی را تعمیق می‌کند (Graham, 2006). رویکردهای مشارکتی نظیر «فکر- زوج - اشتراک»[6] نیز این هماهنگی میان بازنمایی‌ها را تقویت کرده و مشارکت شناختی و هیجانی یادگیرندگان را افزایش می‌دهد (Siregar et al., 2024; Lestari et al., 2024; Birgin & Acar, 2018).

در چنین بستری، چارچوب اس.اِی.ام.آر[7] به‌عنوان یکی از مدل‌های مهم تحلیل ادغام فناوری در آموزش مطرح می‌شود. این چارچوب که نخستین‌بار پونتدورا معرفی کرد، چهار سطح «جایگزینی»، «تقویت»، «تغییر» و «بازتعریف» را برای به‌کارگیری فناوری برمی‌شمارد. در سطح جایگزینی، فناوری تنها جانشین ابزار سنتی می‌شود؛ در مرحلهٔ تقویت، فناوری با بازخورد فوری، عملکرد یادگیری را بهبود می‌بخشد؛ در سطح تغییر، فناوری امکان بازطراحی اساسی فعالیت‌های آموزشی را فراهم می‌کند؛ و در مرحلهٔ بازتعریف، فناوری امکان خلق فعالیت‌هایی را فراهم می‌کند که پیش‌تر قابل انجام نبود (Puentedura, 2006; Attard & Holmes, 2020). جایگاه نرم‌افزار اتوگراف -با توجه به توانایی آن در دست‌کاری پویا، بازنمایی آنی تغییرات و فراهم‌آوردن تجربه‌های جدید یادگیری- در بسیاری از فعالیت‌های هندسی می‌تواند در سطح بازتعریف تحلیل شود؛ جایی که فناوری کیفیتی تازه و ناممکن در آموزش سنتی می‌آفریند.

با وجود این چشم‌انداز مطلوب، وضعیت موجود نشان می‌دهد بسیاری از دانش‌آموزان، به‌ویژه در پایه هفتم، بیش از آنکه بر معنا و ساخت مفهوم تمرکز کنند، به اجرای رویه‌های الگوریتمی روی می‌آورند و در تولید و انتقال میان بازنمایی‌های مختلف دچار مشکل هستند (Fitrianna et al., 2018; Suryana, 2014; Dahiana et al., 2022). غلبه روش‌های سنتی که بازنمایی را محصول نهایی می‌دانند، همراه با تأکید بیش از حد بر نتایج آزمون‌ها، درک مفهومی را محدود می‌کند (Greeno & Hall, 1997). افزون بر این، ضعف در آموزش‌های پایه و فرصت کم برای تجربه بازنمایی‌های تعاملی نیز از عوامل مهم دشواری در یادگیری مباحث هندسی هستند (Yaftian & Bazouki, 2021).

[1] Conceptual representation
[2] Internal Representations
[3] External representations
[4] Autograph
[5] Exploratory Learning
[6] Think–Pair–Share
[7] SAMR

در نتیجه، میان وضعیت مطلوب و وضعیت موجود شکافی آشکار به چشم می‌خورد: از جمله استفادهٔ ناکافی از فناوری‌های پویا، کمبود فعالیت‌هایی که بازنمایی‌های نمادین، بصری و تفسیری را هم‌زمان به کار گیرند، و محدود بودن شواهد تجربی دربارهٔ اثربخشی نرم‌افزارهایی مانند اتوگراف. این کاستی‌ها پیامدهای آموزشی و تربیتی قابل‌توجهی دارند؛ از جمله رواج یادگیری سطحی به‌جای درک عمیق مفاهیم، کاهش توانایی دانش‌آموزان در حل مسائل مفهومی، و تشدید نابرابری‌های آموزشی میان دانش‌آموزان دارای دسترسی به فناوری و دیگران.

پژوهش‌ها نشان می‌دهند که توانایی جابه‌جایی روان میان انواع بازنمایی‌ها رابطه‌ای مستقیم با عملکرد بهتر در حل مسئله و عمق درک مفاهیم دارد(Hohenwarter & Lavicza, 2007; Battista, 2004).

ازاین‌رو پژوهش حاضر با طراحی شبه‌تجربی، اثر نرم‌افزار اتوگراف در ارتقای توان بازنمایی چندگانهٔ ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ هفتم در مباحث مساحت و حجم را بررسی می‌کند. ابزار سنجش شامل سه سؤال تشریحی محقق‌ساخته است که هر سه بُعد بازنمایی-نمادین، بصری و تفسیری- را هم‌زمان می‌سنجند. اگرچه شواهدی درباره نقش مثبت محیط‌های دیجیتال پویا وجود دارد (Graham, 2006; Sari et al., 2020)، اما مطالعاتی که در سطح متوسطه اول و در موضوعات هندسی هر سه بُعد بازنمایی را به‌صورت هم‌زمان ارزیابی کرده باشند بسیار محدودند؛ بنابراین، این پژوهش می‌تواند خلأ نظری و کاربردی موجود را پوشش دهد و به طراحی آموزشی مبتنی بر فناوری در دوره متوسطه اول جهت دهد.

پیشینه پژوهش

پژوهش‌های متعددی نشان داده‌اند که بهره‌گیری از بازنمایی‌های چندگانه، شامل نمادین، بصری و تفسیری، در یادگیری ریاضی می‌تواند درک مفهومی، تفکر خلاق و توانایی حل مسئله را ارتقا دهد (Yaftian & Ahmadi, 2022). تعامل فعال میان بازنمایی‌های بیرونی مانند نمودارها، اشکال و مدل‌های فیزیکی با فرایندهای ذهنی همچون تجسم و استدلال، نقش مهمی در یادگیری هندسه دارد (Goldin & Shteingold, 2001). پژوهش‌ها نشان داده‌اند که تمرین‌هایی مانند فرضیه‌سازی، شناسایی الگو و تدوین راهبردهای حل مسئله می‌توانند توانایی بازنمایی و سازمان‌دهی شناختی را تقویت کنند (Cuoco et al., 1996).

فناوری‌های تعاملی، به‌ویژه نرم‌افزارهای پویای هندسی مانند اتوگراف، امکان دست‌کاری پویا و مشاهده تغییرات لحظه‌ای در ساختارهای هندسی را فراهم می‌کنند و بازخورد فوری ارائه می‌دهند، که به رشد استدلال و تجسم فضایی دانش‌آموزان کمک می‌کند (Hohenwarter & Lavicza, 2007; Graham, 2006; Sari et al., 2020; Hidayat et al., 2022). همچنین، محیط‌های دیجیتال گروه‌محور نه‌تنها تعامل میان بازنمایی‌ها را تقویت می‌کنند، بلکه مشارکت شناختی و هیجانی یادگیرندگان را افزایش می‌دهند (Lestari et al., 2024; Birgin & Akar, 2018).

مطالعات نشان داده‌اند که به‌کارگیری هم‌زمان روابط جبری، نمودارهای بصری و مدل‌های عددی در حل مسائل، موجب سازمان‌دهی بهتر ذهن و یادگیری معنادار می‌شود و با چارچوب نظری ساخت‌گرایی و یادگیری چندسطحی همسو است. در این راستا، نظریه سولو[1] به‌عنوان ابزاری برای تحلیل بازخوردهای شناختی فراگیران کاربرد دارد و ادغام متن و تصویر در طراحی سؤالات ریاضی، انتقال دانش‌آموزان از سطح حفظی به سطح تحلیلی را تسهیل می‌کند (Alamiyan & Khalilzadeh, 2024; Hwang et al., 2007; Pape & Tchoshanov, 2001).

[1] SOLO

نظریه سازنده‌گرایی مبنای نظری پژوهش حاضر را تشکیل می‌دهد. بر اساس دیدگاه سازنده‌گرایانه، یادگیری فرایندی فعال و ساخت‌محور است که یادگیرندگان از طریق تعامل با محیط و بازنمایی‌های مختلف، معنا می‌سازند (Piaget, 1952; Vygotsky, 1978). سازنده‌گرایی تأکید می‌کند که فرصت‌های اکتشافی، بازاندیشی و تعامل همسالان برای ایجاد فهم عمیق مفید است؛ بنابراین استفاده از ابزارهای پویا و مشارکتی که امکان دست‌کاری مستقیم بازنمایی‌ها را فراهم می‌آورند (مانند اتوگراف) با اصول این چارچوب همسویی دارد. در این پژوهش، اهداف مربوط به توسعه بازنمایی‌های بصری، تفسیری و نمادین مبتنی بر این رویکرد طراحی و فعالیت‌ها ساماندهی شده‌اند.

نرم‌افزار اتوگراف محیطی پویا فراهم می‌آورد که در آن دانش‌آموزان می‌توانند ساختارهای هندسی را تغییر دهند و تأثیر آن را بلافاصله مشاهده کنند، که ضمن تقویت استدلال استقرایی، توانایی درک شهودی و انتزاعی را افزایش می‌دهد (Cuoco et al., 1996; Goldin & Shteingold, 2001; Hohenwarter & Lavicza, 2007). طراحی فعالیت‌ها در این محیط می‌تواند بسته و هدایت‌شده، یا باز و اکتشافی باشد و به درک عمیق‌تر مفاهیم هندسی و تقویت الگوسازی جبری دانش‌آموزان منجر شود (French, 2004; Zambak & Tyminski, 2020; Sari et al., 2020; Hidayat et al., 2022). همچنین، استفاده از مدل‌سازی فعال در کلاس درس می‌تواند نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضی را بهبود بخشد و توانایی آنان را در تحلیل و درک ساختارهای فضایی ارتقا دهد (Cross et al., 1982).

برای بهره‌برداری مؤثر از فناوری و تحقق یادگیری معنادار، طراحی آموزشی باید با اهداف برنامه درسی ریاضی همسو باشد و چارچوب‌های پویا در آن، مورد توجه قرار گیرند؛ چارچوب‌هایی که فناوری در آن‌ها به‌عنوان ابزاری برای تقویت فرایند یادگیری به‌کار گرفته می‌شود و در نهایت می‌تواند ادغام فناوری در آموزش را بهبود بخشد و زمینه را برای بهره‌برداری مؤثر از نرم‌افزارهای آموزشی پویا فراهم آورد (Moayeri & Amiripour, 2025; Motamedi, 2024). چارچوب اس.اِی.اِم.آر با سطوح جایگزینی، تقویت، تغییر و بازتعریف، امکان تحلیل ادغام فناوری در آموزش را فراهم می‌کند. مطالعات نشان داده‌اند که بهره‌گیری از نرم‌افزارهای پویای هندسی در سطح «بازتعریف» می‌تواند تجربه یادگیری تعاملی، غنی و ناممکن در آموزش سنتی ایجاد کند (Puentedura, 2006; Attard & Holmes, 2020).

با وجود شواهد متعددی که دربارهٔ اثربخشی ابزارهای دیجیتال وجود دارد، پژوهش‌های شبه‌تجربی محدود و هدفمند درباره تأثیر نرم‌افزار اتوگراف بر توانایی بازنمایی مفاهیم هندسی، به‌ویژه در ارزیابی هم‌زمان سه بعد بازنمایی (بصری، تفسیری و نمادین)، در دانش‌آموزان پایه هفتم اندک است (Siregar et al., 2024; Mohammadi & Abbasi, 2023; Yaftian & Ahmadi, 2022; Alamiyan & Khalilzadeh, 2024; Motamedi, 2024; Dahiana et al., 2022).

با توجه به اهمیت پایهٔ هفتم در توسعهٔ تفکر فضایی و رشد شناختی دانش‌آموزان (French, 2004)، و نقش مفاهیم حجم و مساحت در یادگیری‌های مفاهیم هندسی پیچیده‌تر در سال‌های بعد، پژوهش حاضر با طراحی شبه‌تجربی، اثر نرم‌افزار اتوگراف را در تقویت توانایی بازنمایی سه‌گانهٔ ریاضی بررسی می‌کند. ویژگی‌های نوآورانهٔ این پژوهش شامل تمرکز بر پایه هفتم، بهره‌گیری از ابزار مشخص و کمتر پژوهش‌شده، طراحی شبه‌تجربی، سنجش هم‌زمان سه بُعد بازنمایی (بصری، نمادین و تفسیری) و به‌کارگیری فعالیت‌های مشارکتی است. با توجه به محدودیت پژوهش‌های پیشین، به‌ویژه در داخل کشور، در ارزیابی هم‌زمان سه بُعد بازنمایی و کمبود مطالعات شبه‌تجربی هدفمند در پایه هفتم، پژوهش

حاضر با بهره‌گیری از نرم‌افزار اتوگراف و فعالیت‌های تعاملی، فرصت ارتقای مشارکت فعال، درک عمیق مفاهیم هندسی و توانایی حل مسئله را فراهم می‌آورد و شکاف موجود در یادگیری هندسه را کاهش می‌دهد.

ایده اصلی پژوهش پیش‌رو ضمن مشاهده در کلاس‌ها و مواجهه با مشکلات رایج دانش‌آموزان در انتقال میان بازنمایی‌ها و ضعف در درک مفهومی شکل گرفته است. پژوهشگران با بهره‌گیری از نرم‌افزار اتوگراف و طراحی فعالیت‌های تعاملی، انتظار دارند این رویکرد بتواند بر چالش‌های یادگیری هندسه غلبه کرده و تجربه‌ای نوآورانه و مؤثر برای دانش‌آموزان پایه هفتم فراهم آورند.

روش

این پژوهش شبه‌تجربی با طرح پیش‌آزمون–پس‌آزمون و در قالب دو گروه موازی انجام شد. جامعه‌ی آماری شامل تمامی دانش‌آموزان دختر پایه‌ی هفتم یکی از شهرستان‌های اطراف مشهد در سال تحصیلی ۱۴۰۳–۱۴۰۴ بود. نمونه‌ی پژوهش از میان ۶۶ دانش‌آموز دختر یکی از مدارس دولتی این شهرستان (دو کلاس مستقل، هر کلاس ۳۳ نفر) به‌صورت در دسترس و هدفمند انتخاب گردید. هر یک از دو کلاس به‌عنوان یکی از گروه‌های آموزشی در نظر گرفته شد. گروه نخست، آموزش مبتنی بر نرم‌افزار اتوگراف (رویکرد فناورمحور) را دریافت کرد و گروه دوم با روش سنتیِ کاغذ و قلم آموزش دید. در هر دو گروه، آموزش‌ها به شیوه‌ی گروهی و مشارکتی اجرا شد. به‌دلیل محدودیت‌های اجرایی و ساختار مدرسه، امکان جابه‌جایی دانش‌آموزان و تخصیص تصادفی وجود نداشت؛ بنابراین در انتخاب دو کلاس، تلاش شد تا از نظر پیش‌زمینه‌ی تحصیلی، سطح توانایی ریاضی و سایر عوامل مؤثر بر بازنمایی هم‌سطح باشند. شایان ذکر است که هر دو گروه، مداخله‌ی آموزشی را دریافت کردند و تفاوت صرفاً در شیوهٔ ارائهٔ آموزش بود. برای کنترل متغیرها، محتوای آموزشی، معلم، و تعداد جلسات در هر دو گروه یکسان بود تا تنها تأثیر متغیر «شیوه‌ی اجرا» اندازه‌گیری شود.

برنامهٔ مداخلهٔ آموزشی براساس رویکرد سازنده‌گرایی طراحی گردید تا دانش‌آموزان با تعامل، اکتشاف و دست‌ورزی در محیط نرم‌افزار اتوگراف، به ساخت فعال مفاهیم هندسی بپردازند. همچنین از چارچوب SAMR برای تبیین سطوح به‌کارگیری فناوری استفاده شد؛ به‌گونه‌ای که در مراحل مختلف آموزش، چهار سطح این مدل به‌ترتیب زیر مورد استفاده قرار گرفت:

۱ .سطح جایگزینی برای رسم اشکال ساده (S)،

۲ .سطح تقویت برای نمایش پویای اشکال(A)،

۳ .سطح بازطراحی برای تحلیل روابط و حل مسئله(M) ،

۴ .سطح بازتعریف برای ایجاد بازنمایی‌های جدید و تبادل گروهی ایده‌ها (R).

طراحی محتوای جلسات با الهام از الگوی آموزشی سیناگا و همکاران (Sinaga et al., 2018) انجام شد تا مسیر یادگیری از تمرین‌های پایه تا فعالیت‌های تحلیلی، به‌صورت تدریجی و هدایت‌شده طی شود.

مداخله آموزشی در دو گروهِ موازی و طی شش جلسه ۹۰ دقیقه‌ای توسط یک معلم اجرا شد. تعداد جلسات آموزشی با الهام از پژوهش سیناگا و همکاران (Sinaga et al., 2018) که ۵ جلسه اجرا کرده بودند، تعیین شد. با توجه به تفاوت پایهٔ تحصیلی، گسترهٔ محتوای مباحث، حجم، مساحت و مشورت با اساتید آموزش ریاضی و آمار، یک جلسهٔ اضافی برای تمرین و تثبیت مفاهیم در نظر گرفته شد؛ بنابراین، شش جلسهٔ ۹۰ دقیقه‌ای برای پوشش کامل مفاهیم حجم، مساحت و ایجاد تغییر مورد انتظار در توانایی بازنمایی دانش‌آموزان مناسب ارزیابی شد. جلسه نخست به پیش‌آزمون و جلسهٔ نهایی به پس‌آزمون اختصاص داشت؛ چهار جلسهٔ میانی آموزش و تمرین مفاهیم حجم، مساحت و بازنمایی‌های

هندسی را در بر می‌گرفت. محتوای آموزشی در هر دو گروه یکسان بود و معلم نقشِ راهنما/تسهیل‌کننده داشت. در یک گروه، آموزش با استفاده از قابلیت‌های پویا و بصری نرم‌افزار اتوگراف انجام شد و دانش‌آموزان در گروه‌های کوچک به ترسیم و تحلیل اشکال دوبعدی و سه‌بعدی پرداختند. در گروه دیگر، همان آموزش‌ها به‌صورت گروهی با ابزارهای سنتی (تخته، کاغذ و مداد) انجام شد.

جدول ۱. پروتکل اجرای برنامهٔ آموزشی در گروه مبتنی بر نرم‌افزار اتوگراف

جلسه	هدف آموزشی	فعالیت‌های اصلی در کلاس	نقش معلم	ابزار/محیط	تکلیف بین جلسات	سطح SAMR / مبنای نظری
۱	سنجش اولیه و آشنایی با روش آموزش	اجرای پیش‌آزمون؛ معرفی مختصر نرم‌افزار اتوگراف؛ گروه‌بندی کردن دانش‌آموزان	توضیح روند، نظارت بر آزمون و سازماندهی گروه‌ها	برگهٔ آزمون، پروژکتور، لپ‌تاپ، معلم	مرور بخش مرتبط از کتاب	S (جایگزینی) / ارزشیابی تکوینی
۲	یادگیری مهارت‌های پایه نرم‌افزار	آموزش رسم اشکال ساده و ذخیره‌سازی؛ تمرین گروهی با بازخورد فوری	آموزش فنی و هدایت تمرین‌ها	لپ‌تاپ، اتوگراف، وایت‌برد، ماژیک، دفتر، پروژکتور	رسم یک شکل ساده در اتوگراف + تهیه اسکرین‌شات+ توضیح یک پاراگرافی	S→A/ سازنده‌گرایی
۳	درک ساختار منشور و اثر تغییر ابعاد	ساخت منشور پنج‌پهلوی؛ تغییر پارامترها؛ تحلیل اثر تغییرات در گروه	طرح سوالات کاوش‌محور و هدایت تحلیل	لپ‌تاپ، اتوگراف، وایت‌برد، ماژیک، دفتر، پروژکتور	تهیه گذارش کوتاه از تغییر پارامترهای اشکال هندسی و تفسیر آن‌ها	A / یادگیری اکتشافی سیناگا و همکاران (Sinaga et al., 2018)
۴	حل مسئله با ادغام نمایش‌ها	مقایسهٔ محاسبهٔ دستی و نرم‌افزاری؛ حل مسئله و بررسی خطاها	نظارت بر راهبرد حل و اصلاح محاسبات	لپ‌تاپ، اتوگراف، وایت‌برد، ماژیک، دفتر، پروژکتور	حل یک مسئلهٔ کاربردی واقعی + گزارش کوتاه (تصویر + محاسبه)	M / ادغام نمایش بصری–نمادین
۵	تولید بازنمایی‌های نو و ارائه گروهی	طراحی مدل سه‌بعدی با اندازه دلخواه؛ ارائه و نقد متقابل	مدیریت ارائه، هدایت گفت‌وگو و بازخورد سازنده	لپ‌تاپ، اتوگراف، وایت‌برد، ماژیک، دفتر، پروژکتور	تکمیل پروژه + تهیهٔ یک صفحه خلاصه برای ارائه پایانی	R / یادگیری مشارکتی و تولید معنا
۶	سنجش پس‌آیند مداخله	اجرای پس‌آزمون؛ جمع‌آوری فایل‌ها	نظارت بر اجرا و مستندسازی نتایج	برگهٔ آزمون، لپ‌تاپ برای آرشیو	—	ارزشیابی (مقایسه پیش/پس)

برای سنجش توانایی بازنمایی‌های چندگانه، آزمونی محقق‌ساخته با هدف سنجش سازهٔ یکپارچه «توانایی بازنمایی» که بر اساس شاخص‌های مطرح‌شده در پژوهش سیناگا و همکاران (۲۰۱۸) طراحی شده و هر سوال همزمان سه بُعد بازنمایی زیر را پوشش می‌داد:

۱ .ترسیم و برچسب‌گذاری شکل هندسی (بازنمایی بصری)،

۲ .انجام محاسبات با فرمول‌های استاندارد (بازنمایی نمادین)،

۳ .توضیح نوشتاری درباره‌ی تأثیر تغییر ابعاد بر نتیجه (بازنمایی تفسیری).

تحلیل‌های اصلی پژوهش بر مبنای نمرهٔ کل آزمون طراحی‌شده انجام گرفت.

اعتبار ابزار با تایید روایی محتوایی ابزار توسط چند دبیر ریاضی و متخصصان آموزش ریاضی به دست آمد. پاسخ‌های تشریحی مطابق یک کدبوک مبتنی بر سطوح نظریه سولو (Biggs & Collis, 1982) به صورت عددی (مقیاس ۰–۴) کدگذاری و تمامی نمره‌گذاری‌ها توسط پژوهشگر انجام شد؛ کدبوک توسط همان سه متخصص بازبینی و تأیید گردید. در اجرای آزمایشی روی ۱۱ دانش‌آموز، شاخص‌های آیتمی (شاخص دشواری = ۰٫۳۶۴–۰٫۶۳۶ و همبستگی اصلاح‌شده آیتم–کل = ۰٫۶۶۳–۰٫۷۸۱) مورد بررسی قرار گرفت و پایایی درونی آزمون با آلفای کرونباخ $\alpha = 0.831$ محاسبه گردید؛ بنابراین ابزار از نظر انسجام درونی و پایایی در سطح قابل‌قبولی قرار دارد.

برای تحلیل کمی داده‌ها از آزمون تحلیل واریانس با اندازه‌گیری مکرر در قالب مدل خطی عمومی[1] با نرم‌افزار SPSS نسخه‌ی ۲۱ استفاده شد. برای بررسی دقیق‌تر تفاوت‌ها و مقایسه‌های چندگانه با روش بونفرونی انجام گرفت. پیش از تحلیل، پذیره‌های زیربنایی مدل، شامل نرمال بودن توزیع خطاها، ثابت بودن واریانس آن‌ها و نبود خودهمبستگی مرتبه اول میان خطاها بررسی شد. نتایج آزمون‌های مربوطه نشان داد که هر سه پذیرهٔ مذکور در مدل برقرار بودند.

لازم به ذکر است که پژوهش حاضر با اخذ مجوز از مدیریت مدرسه و در هماهنگی با معلمان انجام شد. اهداف مطالعه به‌صورت شفاف برای مدیر، معلمان و دانش‌آموزان توضیح داده شد. مشارکت دانش‌آموزان با اطلاع و رضایت والدین آنان و با رعایت اصل محرمانگی اطلاعات صورت گرفت.

یافته‌ها

در راستای بررسی اثر کاربرد نرم‌افزار اتوگراف بر توانایی بازنمایی‌های چندگانه، داده‌های حاصل از اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون در دو گروه آموزش سنتی و آموزش دیجیتال گردآوری و تحلیل شدند. این بخش شامل گزارش توصیفی و استنباطی عملکرد یادگیرندگان در مراحل مختلف ارزیابی است.

در گام نخست، برای هر یک از گروه‌ها، میانگین، انحراف معیار و تعداد آزمودنی‌ها در دو مرحلهٔ آزمون محاسبه شد. نتایج حاصل در جدول زیر ارائه شده است:

جدول ۲. شاخص‌های آماری توصیفی توانایی بازنمایی به تفکیک گروه و مرحلهٔ آزمون

گروه آموزشی	مرحله آزمون	میانگین	انحراف معیار	تعداد
اتوگراف	پیش‌آزمون	۵٫۶۷	۲٫۷۵۸	۳۳
سنتی	پیش‌آزمون	۵٫۰۰	۳٫۰۹۲	۳۳
کل	پیش‌آزمون	۵٫۳۳	۲٫۹۲۶	۶۶
اتوگراف	پس‌آزمون	۹٫۵۵	۲٫۲۳۷	۳۳
سنتی	پس‌آزمون	۶٫۴۸	۳٫۰۴۳	۳۳
کل	پس‌آزمون	۸٫۰۲	۳٫۰۶۶	۶۶

همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، نمرات پس‌آزمون در هر دو گروه نسبت به مرحلهٔ پیشین افزایش داشته‌اند. گروهی که با نرم‌افزار اتوگراف آموزش دیده بود، به‌طور میانگین ۳٫۸۸ نمره رشد را نشان داد، در حالی‌که افزایش در گروه سنتی به ۱٫۴۸ نمره محدود شد. کاهش انحراف معیار در گروه اتوگراف از ۲٫۷۵۸ به ۲٫۲۳۷، بیانگر انسجام بیشتر عملکرد

[1] General Linear Model (GLM)

یادگیرندگان پس از مداخله آموزشی است. این تفاوت‌ها از نظر آماری در سطح خطای ۵ درصد معنادار بودند (p-مقدار کمتر از ۰,۰۰۱).

برای بررسی دقیق‌تر تأثیر روش تدریس و زمان آزمون بر عملکرد بازنمایی، از تحلیل واریانس با اندازه‌گیری مکرر استفاده شد. نتایج حاصل در جدول زیر آمده است:

جدول ۳. نتایج تحلیل واریانس برای بررسی اثرات درون‌گروهی و تعامل روش × زمان

منبع اثر	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	مقدار F	p مقدار	ضریب اتای جزئی
زمان (هوین–فلت)	۲۳۷,۳۴۱	۱	۲۳۷,۳۴۱	۸۳,۵۱۶	p < ۰,۰۰۱	۰,۵۶۶
زمان × روش آموزشی	۴۷,۲۸۰	۱	۴۷,۲۸۰	۱۶,۶۳۷	p < ۰,۰۰۱	۰,۲۰۶
روش آموزشی (بین‌گروهی)	۱۱۴,۶۱۴	۱	۱۱۴,۶۱۴	۸,۹۰۳	p = ۰,۰۰۴	۰,۱۲۲

جدول ۳ نتایج تحلیل واریانس را برای بررسی اثرات درون‌گروهی و تعامل روش × زمان نشان می‌دهد. اثر عامل زمان (پیش‌آزمون و پس‌آزمون) معنادار گزارش شد ($F(1,64) = 83.516$, $p < .001$; η^2 جزئی = ۰,۵۶۶). همچنین تعامل زمان × روش آموزشی معنادار بود ($F(1,64) = 16.637$, $p < .001$; η^2 جزئی = ۰,۲۰۶). علاوه بر این، اثر بین‌گروهی روش آموزشی نیز معنادار گزارش شد ($F(1,64) = 8.903$, $p = .004$; η^2 جزئی = ۰,۱۲۲).

برای تحلیل دقیق‌تر، مقایسه‌های زوجی بین مراحل آزمون برای هر گروه انجام شد که نتایج آن در جدول زیر آمده است:

جدول ۴. مقایسهٔ زوجی میانگین نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون برای هر گروه (روش بونفرونی)

روش آموزشی	مرحله آزمون	مرحله مقایسه‌شده	تفاوت میانگین	خطای استاندارد	p مقدار	بازه اطمینان ۹۵٪
اتوگراف	پس‌آزمون	پیش‌آزمون	۳,۸۷۹	۰,۴۱۵	p < ۰,۰۰۱	[-۳.۰۵۰, ۴,۷۰۸]
سنتی	پس‌آزمون	پیش‌آزمون	۱,۴۸۵	۰,۴۱۵	p < ۰,۰۰۱	[-۰,۶۵۶, ۲,۳۱۴]

مقایسه نتایج آزمون در جدول شماره۴، در دو بازه زمانی نشان می‌دهد که میزان پیشرفت گروه اتوگراف به شکل معناداری در سطح خطای ۵ درصد بیشتر از گروه سنتی است. در نهایت، برای سنجش تفاوت میان دو روش آموزش در هر مرحله به‌صورت مستقل، مقایسه میان‌گروهی انجام شد:

جدول ۵. مقایسه میان‌گروهی در مراحل پیش‌آزمون و پس‌آزمون

مرحله آزمون	گروه (اول)	گروه (دوم)	تفاوت میانگین	خطای استاندارد	p مقدار	بازه اطمینان ۹۵٪
پیش‌آزمون	اتوگراف	سنتی	۰,۶۶۷	۰,۷۲۱	۰,۳۵۹	[-۰,۷۷۴, ۲.۱۰۸]
پس‌آزمون	اتوگراف	سنتی	۳,۰۶۱	۰,۷۲۱	p < ۰,۰۰۱	[۱.۷۴۷, ۴,۳۷۴]

نتایج جدول ۵ نشان می‌دهد که در مرحلهٔ پیش‌آزمون، تفاوت میانگین بین دو گروه از نظر آماری معنادار نبوده است ($p = 0.359$) . در مقابل، در مرحلهٔ پس‌آزمون، تفاوت میانگین به‌طور معناداری در سطح خطای ۵ درصد به نفع گروه اتوگراف بوده است ($p < 0.001$).

بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های این پژوهش نشان داد که به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانهٔ مبتنی بر نرم‌افزار اتوگراف در آموزش مفاهیم هندسی فراتر از انتقال صرف دانش اولیه عمل می‌کند و به شکل‌گیری درک ساختاری، تفسیر روابط و افزایش انعطاف‌پذیری ذهنی دانش‌آموزان کمک می‌نماید. این نتیجه بر پایه الگوهای مشاهده‌شده در طول مداخله و تغییرات رفتاری ثبت‌شده در ارزیابی‌ها به‌دست آمده است. کار در بستر دیجیتال، علاوه‌بر آن‌که دقت در ترسیم و محاسبه را افزایش داد، توان تحلیل و تبیین تغییرات هندسی را نیز تقویت کرد؛ بنابراین دسترسی هم‌زمان به بازنمایی‌های بصری، عددی و نمادین می‌تواند فرایند یادگیری را از سطح اجرای صرف الگوریتم‌ها به سطحی عمیق‌تر و معنادارتر ارتقا دهد.

در رویکردهای سنتی، مفاهیم معمولاً به‌صورت خطی و ایستا و عمدتاً با اتکاء بر انتقال محتوا ارائه می‌شوند؛ این شیوه دانش‌آموزان را بیشتر به اجرای درست رویه‌ها و تثبیت مهارت‌های محاسباتی سوق می‌دهد تا کشف ساختارها و روابط درونی مفاهیم. در مقابل، محیط اتوگراف زمینه‌ای برای تعامل فعال با انواع بازنمایی‌ها فراهم کرد و به همین سبب امکان تجربه‌گری، کشف تدریجی و درگیری ذهنی بیشتری را برای فراگیران مهیا ساخت. این ویژگی به‌ویژه در آموزش مفاهیم فضایی -مانند حجم و مساحت که نیازمند پیوند شهودی با انتزاع‌های نمادین‌اند- اثربخش ظاهر شد. همچنین انسجامِ عملکرد دانش‌آموزان در ارزیابی‌های پایانی نشان داد که بهره‌گیری از بازنمایی‌های چندگانه می‌تواند به کاهش اختلاف‌های عملکردی میان دانش‌آموزان با پیش‌زمینه‌های متفاوت کمک کند؛ لازم به ذکر است که این «کمک» در چارچوب نتایج مشاهده‌شده در نمونهٔ این پژوهش مطرح می‌شود و تعمیم کامل آن به جمعیت‌های دیگر نیازمند مطالعات تکمیلی است.

یکی از جنبه‌های بارز این نوع آموزش، بهبود توانایی دانش‌آموزان در درک تغییرات و تفسیر روابط میان ابعاد اشکال هندسی است. شهود فضایی به‌معنای توانایی درک، سامان‌دهی و پیش‌بینی روابط مکانی و نسبت‌های هندسی میان اشیاء است (Friedman, 2009). در بستر نمایش‌های تعاملی، دانش‌آموزان می‌توانستند اثر تغییر پارامترها را به‌صورت هم‌زمان در چند نمای مختلف مشاهده و از دل آن روابط ساختاری را استخراج کنند؛ این روند باعث شد که به‌جای تکیهٔ صرف بر حفظ فرمول‌ها، پیوندی معنادار میان نمایش‌های بصری و نمادین شکل گیرد و در نتیجه شهود فضایی و درک

مفهومی تعمیق یابد. توضیحِ ارائه‌شده در این‌جا تبیینی از فرایندهای مشاهده‌شده در کلاس‌ها و مبتنی بر داده‌ها و مشاهدات آموزشی این پژوهش است. با این همه، لازم است تأکید شود که اثربخشی چنین محیط‌هایی تنها به‌واسطهٔ وجود ابزار نیست؛ کیفیت طراحی آموزشی، هدایت و حمایت معلم و تناسب فعالیت‌ها با سطح شناختی یادگیرندگان از عوامل تعیین‌کننده در اثربخشی مداخله‌اند. فناوری، زمانی واقعا مفید خواهد بود که نه صرفاً به‌عنوان یک نمایشِ بصری، بلکه در خدمتِ اهداف یادگیری قرار گیرد.

در این پژوهش، استفاده از اتوگراف همراه با تمرکز بر بازنمایی‌های چندگانه به‌نحوی طراحی شد که تجربه‌های بصری، عددی و نمادین دانش‌آموزان به‌صورت منسجم در خدمت فهم عمیق مفاهیم قرار گیرند. این رویکرد علاوه بر پیوند تجربهٔ حسی با انتزاع مفهومی، با دیدگاه‌هایی که دربارهٔ ضرورت هماهنگی فناوری با اهداف آموزشی مطرح شده‌اند نیز هم‌راستا است (Rocha, 2025; Pittalis, 2021; Bach et al., 2024). در واقع، این پژوهش بر این اصل استوار بود که ابزار به‌تنهایی کافی نیست و صرفاً در صورت هدایت هدفمند و طراحی آموزشی مؤثر، به کارایی خواهد رسید.

نتایج این پژوهش با شواهد پیشین نیز تطابق دارد؛ با مطالعاتی که به نقش بازنمایی‌های پویا در تسهیل یادگیری اشاره کرده‌اند (Karnasih & Sinaga, 2014; Moharomah & Irawati, 2021). وجه تمایزِ پژوهش حاضر در تمرکز ویژه بر مفاهیم پایه‌ای حجم و مساحت در پایهٔ هفتم نهفته است؛ این سطح سنی در بسیاری از مطالعات پیشین کمتر به‌صورت اختصاصی بررسی شده و یافته‌های حاضر نشان می‌دهد که به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در این مقطع می‌تواند به شکل‌گیریِ درکی عمیق‌تر، معنادارتر و ساختاری‌تر از مفاهیم هندسی بینجامد. از این‌رو پژوهش حاضر تا حدی خلأ موجود در آموزش مفاهیم فضایی در مقاطع پایین‌تر را پاسخ داده و زمینه‌ای برای بازاندیشی در طراحی فعالیت‌های یادگیری مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه فراهم آورده است.

نتایج این پژوهش باید با احتیاط و با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی تفسیر شود؛ از جمله محدود بودن نمونه به یک مقطع تحصیلی، طول نسبتاً کوتاه دورهٔ مداخله و وابستگی به یک نرم‌افزار خاص. برای افزایش قطعیت و تعمیم‌پذیری پیشنهاد می‌شود که پژوهش‌های آینده این رویکرد را در دوره‌های طولانی‌تر، در مقاطع تحصیلی گوناگون، با ابزارهای دیجیتال متنوع‌تر و در نمونه‌های بزرگ‌تر و تفکیک‌شده‌تر و بر اساس جنسیت (پسران و دختران) بررسی کنند. همچنین توصیه می‌شود مطالعات بعدی از طراحی‌های مقاوم‌تر (مثلاً کارآزمایی‌های کنترل‌شده، پیگیری بلندمدت و استفاده از ابزارهای استاندارد سنجش شهود فضایی) بهره بگیرند.

از منظر کاربردی، پیشنهاد می‌شود در طراحی درس‌ها: حداقل دو نوع بازنمایی (بصری و نمادین) هم‌زمان به‌کار گرفته شود، نمایش‌های تعاملی برای نشان‌دادن تغییرات پارامتری و تحلیل آنان استفاده گردد، و در برنامه‌های توانمندسازی معلمان بخش‌های عملیِ کار با ابزارهای دیجیتال تقویت شود.

مشارکت نویسندگان

نگارش مقاله به صورت مشترک انجام پذیرفته است و بررسی نهایی و ویراستاری مقاله و تجزیه و تحلیل‌های آماری توسط نویسنده دوم(استاد راهنمای اول) و نویسنده سوم(استاد مشاور۱) و نویسنده چهارم(استاد مشاور ۲) بررسی گردیده است.

تشکر و قدردانی

این مقاله مستخرج از پایان‌نامه‌ی خانم فاطمه ارگنجی، دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه فردوسی مشهد است که در جلسه‌ی شورای تحصیلات تکمیلی گروه مورخ ۱۴۰۳/۱۲/۲۰ و به شماره‌ی ۲۱۹ تصویب شده است. این پژوهش با راهنمایی دکتر سید حسن علم‌الهدایی و با مشاورۀ اول محدثه علی‌زاده و مشاورۀ دوم دکتر مهدی جباری نوقابی از دانشگاه فردوسی مشهد انجام گرفته است.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

References

Alamiyan, V., & Khalilzadeh, R. (2024). The effect of using multiple representations on mathematics teachers' instruction based on SOLO theory in the topic of equation and linear equation. *Theory and Practice in Teacher Education*, 10(18), 33–50. https://doi.org/10.48310/itt.2025.3964 [In Persian]

Akbari, Z. A., & Pourkrimi, J. (2025). The Role of Artificial Intelligence in Curriculum Design: A Meta-Synthesis Study. *JCDR*, 7-1130. [In Persian]

Attard, C., & Holmes, K. (2020). Technology-enabled mathematics education: Optimising student engagement. *Routledge*. https://doi.org/10.4324/9780429351581

Bach, C. C., Bergqvist, E., & Jankvist, U. T. (2024). Students' dynamic communication while transforming mathematical representations in a dynamic geometry environment. *ZDM–Mathematics Education*, 56(3), 543–557. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01575-x

Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185–204. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_6

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy. Academic Press.

Birgin, O., & Acar, H. H. (2018). The effect of computer-supported collaborative learning on students' achievement in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(6), 874–893. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1418917

Cross, A., Moscardini, A. O., & Thorp, J. (1982). Interactive computer simulation tools for use in teaching mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 13(6), 763–778. https://doi.org/10.1080/0020739820130609

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375–402.

Dahiana, W. O., Herman, T., & Nurlaelah, E. (2022). Representation thinking tool of a student in mathematical problems solving. *AIP Conference Proceedings*, 2468, 070066. https://doi.org/10.1063/5.0129817

Fitrianna, A. Y., Dinia, S., Mayasari, M., & Nurhafifah, A. Y. (2018). Mathematical representation ability of senior high school students: An evaluation from students' mathematical disposition. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 3(1), 46–56. https://doi.org/10.23917/jramathedu.v3i1.5387

French, D. (2004). Teaching and learning geometry: Issues and methods in mathematical education. Continuum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), The roles of representation in school mathematics (pp. 1–23). *National Council of Teachers of Mathematics*.

Graham, A. (2006). Developing thinking in statistics. Paul Chapman Publishing.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. Phi Delta Kappan, 78, 361–367.

Hidayat, A., Aminah, N. S., & Masriyah, M. (2022). Analysis of Think-Pair-Share assisted by Autograph to foster students' mathematical problem solving ability. *International Journal of Multicultural and Multireligious Understanding*, 9(12), 1749–1756. https://doi.org/10.18415/ijmmu.v9i12.4186

Hohenwarter, J., & Lavicza, Z. (2007). Presenting and implementing dynamic mathematics software: GeoGebra and the International GeoGebra Institute. In TSG 16: Research and development in the teaching and learning of calculus. *ICME*-11, Monterrey, Mexico.

Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Dung, J.-J., & Yang, Y.-L. (2007). Multiple representation skills and creativity effects on mathematical problem solving using a multimedia whiteboard system. *Educational Technology & Society*, 10(2), 191–212.

Kaput, J. J. (1986). Information technology and mathematics: Opening new representational windows (Technical Report No. ETC-86-3). Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education.

Karnasih, I., & Sinaga, M. (2014). Integration of Autograph in improving mathematical problem solving and mathematical connection ability using cooperative learning Think-Pair-Share. In Proceedings of the Southeast Asian Conference on Innovation and Technology for Mathematics and Mathematics Education (pp. 85–102). *SEAMEO* Regional Centre for QITEP in Mathematics.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (*Eds*.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 263–343). Academic Press.

Lestari, D., Usman, U., & Munzir, S. (2024). Mathematical representation abilities and self-confidence through application of discovery learning model with Geogebra-assisted. In R. Johar et al. (Eds.), Proceedings of the 2nd Annual International Conference on Mathematics, Science and Technology Education (*AICMSTE* 2023) (pp. 98–106). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/978-2-38476-216-3_11

Moayeri, M., & Amiripour, P. (2025). Effective Quality of Teachers Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) in Implementing Guided Discovery Learning in Elementary Education. *JCDR*, 1136.

Mohammadi, A., & Abbasi, Z. (2023). Investigating the improvement of the understanding of the 7th level and volume of mathematics based on the use of technology in teaching. *Research in Mathematics Education*, 3(2), 81–97. https://doi.org/10.48310/rme.2024.16969.1089 [In Persian]

Moharomah, I., & Irawati, S. (2021). Improving mathematical understanding and motivation of students through contextual learning approaches using Autograph software. *JIPMat: Journal of Instructional Mathematics*, 6(2), 311–330. https://doi.org/10.26877/jipmat.v6i2.9012

Motamedi, A. (2024). A systematic approach to the innovations in curriculum planning approaches and their role in education and upbringing. *Journal of research in curriculum studies*, *4*(1), 81-94. [In Persian]

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, 40(2), 118–127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6

Pittalis, M. (2021). Extending the technology acceptance model to evaluate teachers' intention to use dynamic geometry software in geometry teaching. International Journal of *Mathematical Education in Science and Technology*, 52(9), 1385–1404. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1766139

Rocha, H. (2025). Knowledge to teach mathematics with technology: The Global Model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2483488

Sari, L., Syahputra, E., & Surya, E. (2020). Development of Autograph-based learning tools to improve mathematical communication skills students in vocational high school. *International Journal of Multicultural and Multireligious Understanding*, 7(8), 326–335. https://doi.org/10.18415/ijmmu.v7i8.1880

Sinaga, I. K. M. (2014). Enhancing mathematical problem solving and mathematical connection through the use of dynamic software Autograph in cooperative learning Think-Pair-Share. *SAINSAB*, 17, 51–71.

Sinaga, Y. R., Syahputra, E., Ahyaningsih, F., & Saragih, S. H. B. (2018). The effect of cooperative learning type Think Pair Share with Autograph on the mathematical representation ability and self-efficacy. *American Journal of Educational Research*, 6(11), 1481–1486. https://doi.org/10.12691/education-6-11-6

Siregar, R. N., Suryadi, D., Prabawanto, S., & Mujib, A. (2024). Improving mathematical problem-solving abilities through Think Pair Share learning using Autograph. *KnE Social Sciences*, 9(8), 468–481. https://doi.org/10.18502/kss.v9i8.15583

Suryana, A. (2014). Improving mathematical representation skill by using PACE model. In Proceedings of the International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Sciences (*ICRIEMS* 2014) (pp. ME–79–ME–84). Yogyakarta State University.

Yaftian, N., & Bazouki, L. (2021). Students' challenges with shape-based concepts in geometry. *Rahbordhā-ye Novin-e Tarbiat-e Moalleman*, 7(11), 47–65. [In Persian]

Yaftian, Y., & Ahmadi, A. (2022). Multiple representations in the 10th grade mathematics textbook: Theory and practice in teacher education. *Lesson Study in Mathematics Education*, 8(14), 141–160. [In Persian]

Zambak, V. S., & Tyminski, A. M. (2020). Examining mathematical technological knowledge of pre-service middle grades teachers with Geometer's Sketchpad in a geometry course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(2), 183–201. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1650302

Nelissen, J. M. C., & Tomic, W. (1998). *Representations in mathematics education* (ERIC Document Reproduction Service No. ED428950). ERIC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED428950.pdf

Thomas, M. O. J. (2008). *Conceptual representations and versatile mathematical thinking* [Conference paper]. ResearchGate.

Puentedura, R. R. (2006). SAMR: A contextualized introduction. Hippasus. http://hippasus.com/rrpweblog/archives/2013/10/02/SAMR_ABriefIntroduction.pdf

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1979). The interaction of field independence with discovery learning in mathematics. Journal of Experimental Education, 48(1), 32–35. https://doi.org/10.1080/00220973.1979.11011710

Friedman, M. (2000). Geometry, construction and intuition in Kant and his successors. In G. Sher & R. L. Tieszen (Eds.), *Between logic and intuition: Essays in honor of Charles Parsons* (pp. 186–218). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511570681.010

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children* (M. Cook, Trans.). International Universities Press.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes (M. Cole, Trans.; V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Harvard University Press.